

ХЛІ Летняя многопредметная школа Кировской области  
Вишкиль. 1–26 июля 2025 г.



## 6 КЛАСС

# МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Байрак К.В.  
Емельченкова А.С.  
Киселёв И.А.  
Ковязина Е.М.  
Ленюк С.В.  
Оскорбин Д.Н.  
Старостина О.В.  
Финаревский Л.Б.

## От авторов

Перед вами сборник материалов занятий групп 6 класса математического отделения XLI Кировской летней многопредметной школы, которая состоялась 1–26 июля 2025 года в ДОЛ «Вишкиль» Котельничского района Кировской области. Сборник может быть интересен школьникам, учителям, руководителям математических кружков. Составители благодарят учеников ЛМШ–2025 за проявленную активность в решении задач настоящего сборника.

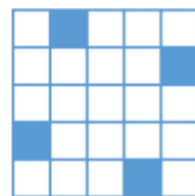


## Вступительная олимпиада. 2 июля

1. В клетках квадрата  $5 \times 5$  расставлены числа так, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах одинаковы. Сумма всех чисел в левом верхнем квадрате  $2 \times 2$  равна 10, а в правом нижнем квадрате  $3 \times 3$  равна 15. Найдите сумму всех чисел в таблице.

2. Биологи и химики встали в круг. Всего 140 человек. Биологи всегда говорят правду биологам и врут химикам, а химики всегда говорят правду химикам и врут биологам. Каждый из них сказал одну фразу своему соседу справа: «Ты — биолог» или «Ты — химик». Таких фраз оказалось поровну. Сколько биологов и сколько химиков стоит по кругу?

3. Сколько клеточных прямоугольников, содержащих хотя бы одну закрашенную клетку, изображено на рисунке? Любой квадрат (в частности, сам квадрат  $5 \times 5$ ) является прямоугольником.



4. В ящике у Карлсона лежат конфеты трех сортов: мармеладные, шоколадные и карамель, каждого сорта хотя бы по одной. Карлсон утверждает, что, какие бы сто конфет ни вынуть из ящика, среди них обязательно встретятся и мармеладные, и шоколадные конфеты. Какое наибольшее число конфет может быть у Карлсона в столе?

5. На доске записаны все девятизначные натуральные числа, десятичная запись которых содержит каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее среди записанных на доске чисел и стирают. Какая пара чисел будет стерта последней?

6. На карточках записаны числа от 1 до 100. Карточки выложены одна за другой в произвольном порядке. Разрешается поменять местами две карточки, если число, написанное на одной из них, делится на число, написанное на другой. Докажите, что не более, чем за 150 операций числа на карточках можно расположить в порядке возрастания.

7. По кругу стоят 100 натуральных чисел. В каждой тройке подряд стоящих чисел одно из этих чисел равно полусумме двух других. Верно ли, что все числа равны?

## 1. Разумный перебор. 3 июля

1. а) Сколько существует чисел, больших, чем 3528, каждое из которых можно получить перестановкой цифр данного числа?

б) Сколько существует трёхзначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 4?

в) На окружности отметили четыре различные точки. Сколько получилось дуг?

- г) Сколько двузначных чисел, у которых первая цифра меньше второй?
- д) Есть две белые, две красные и две розовые гвоздики. Сколькими способами их можно расставить в три вазы так, чтобы в каждой вазе стояли по две гвоздики разного цвета?
- е) Петя и Вася играют в пинг-понг, матч продолжается до трех побед. Сколько существует вариантов протекания матча?
- ж) Из Жёлтой страны в Голубую ведут две дороги, из Голубой страны в Розовую — четыре. Из Жёлтой страны в Фиолетовую ведут три дороги, из Фиолетовой страны в Розовую — тоже три. Прямых дорог из Жёлтой страны в Розовую и из Голубой страны в Фиолетовую нет. Сколькими путями можно добраться из Жёлтой страны в Розовую? А из Голубой страны в Фиолетовую?
- з) Алфавит племени Ни-Бум-Бум содержит только три буквы — А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из трёх букв. Сколько слов в языке этого племени?
- и) **Задача Леонарда Эйлера.** Четверо господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получит чужую шляпу?

2. На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребёнка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?

3. Сколько пар натуральных чисел удовлетворяет равенству  $2x + 5y = 90000$ ?

4. Петя и Вася играют в игру. У них есть табличка  $2 \times 16$  (2 строки, 16 столбцов). Сначала Петя расставляет по одному натуральному числу в каждой клетке 5-го, 6-го, 7-го и 8-го столбцов, и показывает их Васе. Затем Вася пронумеровывает все клетки таблицы числами от 1 до 32 так, чтобы в обеих строках номера шли в порядке возрастания слева направо, и все числа от 1 до 32 были использованы Васей по одному разу. Петя побеждает, если найдется клетка, номер которой в Васиной нумерации совпадет или с написанным в ней Петей числом, или с числом, записанным Петей в другой клетке того же столбца. Вася выигрывает в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Каких палиндромов больше: 2023-значных, кратных 99, или 2024-значных, кратных 99? Напоминаем, что палиндромом называется натуральное число, которое читается одинаково как в прямом, так и в обратном направлении.

## 2. Делимость—1. 3 июля

**Определение.** Говорят, что число  $a$  *делится* на число  $b$  (или  $a$  *кратно*  $b$ , или  $b$  *делитель*  $a$ ), если существует такое целое число  $q$ , что  $a = b \cdot q$ . Обозначение:  $a : b$ ,  $b \mid a$ .

**Определение.** Натуральное число, отличное от 1, называется *простым*, если оно имеет ровно два различных натуральных делителя. Натуральное число, имеющее более двух различных натуральных делителей, называется *составным*.

**Замечание.** Число 1 не является ни простым, ни составным числом.

1. Может ли произведение квадрата и куба некоторого натурального числа, большего единицы, быть шестой степенью натурального числа?

2. Двухзначное число  $n$  такое, что число  $n + 10!$  — простое. Докажите, что число  $n$  тоже простое.

3. На доске написаны 5 простых чисел, каждое из которых больше 2025. Докажите, что разность между какими-то двумя выписанными числами делится на 10.

4. Федя хочет из чисел  $1, 2, 3, \dots, 2024$  вычеркнуть наименьшее возможное количество так, чтобы произведение оставшихся чисел не делилось на 2024. Сколько чисел ему придется вычеркнуть?

5. Известно, что  $28a + 30b$  делится на 13. Верно ли, что тогда и  $15a + 56b$  тоже делится на 13?

6. Дмитрий Николаевич написал на доске двухзначное число и спросил шестиклассников по очереди, делится ли оно на 2? На 3? На 4? ... на 9? На все восемь вопросов дети ответили правильно, при этом ответов «да» и «нет» было поровну.

а) Можно ли восстановить ответ хотя бы на один вопрос, не зная самого числа?

б) А хотя бы на два вопроса?

7. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых нескольких первых чисел делится на следующее за ними число. Первое записанное число — 37, второе — 1. Какое третье?

8. Дмитрий Николаевич, в очередной раз, написал на доске на этот раз длинное число и попросил 40 своих учеников рассказать про его делители. Первый ученик сказал: «Написанное число делится на 2». Второй ученик сказал: «Написанное число делится на 3». Третий ученик сказал: «Написанное число делится на 4»... Сороковой ученик сказал: «Написанное число делится на 41». Оказалось, что ровно два ученика ошиблись, причем они стоят подряд. Определите, кто из учеников ошибся.

9. У натурального числа  $n$  выписали все его делители, затем у каждого из этих делителей посчитали сумму цифр. Оказалось, что среди этих сумм нашлись все числа от 1 до 9. Найдите наименьшее возможное значение числа  $n$ .

### 3. Последовательное конструирование. 4 июля

1. а) Представьте 1 как сумму трёх различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

б) Представьте 1 как сумму четырёх различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

в) Представьте 0,8 как сумму шести различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

г) Как представить 0,8 в виде суммы ста дробей такого вида?

2. а) Придумайте 3 различных натуральных числа таких, чтобы их сумма делилась на каждое из чисел.

б) Придумайте 4 таких числа.

в) Придумайте 10 таких чисел.

3. Как построить последовательность из 10 натуральных чисел, где каждое число при делении на любое из предыдущих даёт в остатке 1?

4. В клетках квадратной таблицы  $10 \times 10$  ровно 9 нулей и проведена диагональ из левого верхнего угла в правый нижний. Можно переставлять столбцы и строки вместе с их содержимым. Всегда ли можно добиться, чтобы все нули лежали под диагональю?

5. а) Двое крестьян за выполненную работу получили мешок зерна. Как им без весов разделить это зерно, чтобы каждый из них считал, что ему досталось не менее половины зерна?

б) Трое крестьян за выполненную работу получили мешок зерна. Как им без весов разделить это зерно, чтобы каждый из них считал, что ему досталось не менее трети зерна?

в) Как решить аналогичную задачу для  $n$  крестьян?

#### *Дополнительные задачи*

6. На лестнице нарисованы стрелочки. На одной из ступеней стоит человек. Он идет со ступеньки в ту сторону, в которую указывает стрелочка, после чего стрелочка на ступеньке, с которой он сошел, обращается в противоположную сторону. Докажите, что когда-нибудь человек покинет лестницу.

7. Существуют ли такие натуральные числа  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$ , что  $\text{НОД}(a_1, a_2) > \text{НОД}(a_2, a_3) > \dots > \text{НОД}(a_{99}, a_{100})$ ?

8. Докажите, что для любого натурального числа  $n$  существует составленное из цифр 1 и 2 число, делящееся на  $2^n$ .

9. В ряд расположили  $n$  лампочек и зажгли некоторые из них. Каждую минуту после этого все лампочки, горевшие на прошлой минуте, гаснут, а те негоревшие лампочки, которые на прошлой минуте соседствовали ровно с одной горячей лампочкой, загораются. При каких  $n$  можно так зажечь некоторые лампочки вначале, чтобы потом в любой момент нашлась хотя бы одна горящая лампочка?

10. На доске выписаны числа от 1 до 666. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно заменить любые два числа на их сумму. Игра заканчивается, когда на доске останутся два числа. Петя хочет добиться, чтобы одно из них делилось на другое. Может ли Вася ему помешать?

#### 4. Делимость—2. 4 июля

**Теорема (о делении с остатком).** Пусть  $a$  и  $b$  — два целых числа,  $b \neq 0$ . Существует единственная пара целых чисел  $q$  и  $r$ , такая, что  $0 \leq r < |b|$  и при этом  $a = bq + r$ .

**Определение.** Число  $q$  называется (неполным) *частным* от деления  $a$  на  $b$ , число  $r$  — *остатком*.

1. Найдите остаток от деления на 8 чисел:  $9^{100}$ ;  $7^{99}$ ;  $2026^{2025}$ .
2. Докажите, что  $2222^{5555} + 5555^{2222}$  делится на 7.
3. Найдите последнюю цифру числа  $7^{7^7}$ .
4. Алиса с пятью подружками купили с собой в ЛМШ огромный рюкзак конфет. Они распределили конфеты поровну на 24 дня и еще 18 конфет осталось на дорогу домой. По дороге в лагерь девочки поссорились и поделили конфеты поровну. Маша распределила свои конфеты поровну на 24 дня, а остаток отложила на обратную дорогу. Какое количество конфет могло быть отложено?
5. На Поле Чудес растут деревья с золотыми монетами. Каждую ночь на каждом дереве вырастает по одной новой монете. 1 февраля на деревьях было всего 1000 монет. В один из следующих февральских дней Буратино посадил еще одно дерево, и 1 марта на деревьях оказалось всего 2440 монет. В какой день Буратино посадил дерево?
6. Докажите, что
  - а)  $n^3 + 2n$  делится на 3 при любом натуральном  $n$ ;
  - б)  $n^2 + 1$  не делится на 3 ни при каком натуральном  $n$ ;
7. Известно, что  $p$  и  $p^2 + 2$  — простые числа. Докажите, что  $p^3 + 2$  — также простое число.

8. Ярик играл в солдатиков. Сначала он попытался построить их парами, но один солдатик оказался лишним. Тогда Ярик стал строить солдат тройками, но снова один остался. Та же история повторялась и при построениях по 4, по 5 и по 6. Ярик уже приготовился выбрасывать непослушного, но тут ему наконец удалось построить всех в колонну по 7. Сколько солдат могло быть у Ярика, если их было меньше 1000?

### *Дополнительные задачи*

9. Дано чётное число  $a$ . Докажите, что существует бесконечно много нечётных натуральных чисел  $n$  таких, что  $a^n + n$  — составное число.

10. Вначале на доске написаны числа 3, 7 и 9. Если написаны числа  $a$  и  $b$ , где  $a > b$ , то можно дописать число  $5a - 4b$ . Может ли на доске в некоторый момент оказаться число 2025?

11. Сколько существует натуральных чисел  $n$ ,

а) меньших 30;

б) меньших 10000,

для которых  $2^n - n^2$  делится на 7?

## 5. Две модели. 5 июля

**Упражнение.** В ряд выписаны 100 чисел, первое равно 3, а сумма любых трёх подряд равна 100. Можно ли наверняка узнать, чему равно 100-е число? 50-е число?

### *Задачи*

1. В ряд выложены 5 карточек. На оборотной стороне каждой написано вещественное число. Про любые две карточки можно узнать

а) сумму чисел на них. Всегда ли можно определить, какие числа написаны на карточках?

б) произведение чисел на них. Всегда ли можно определить, какие числа написаны на карточках?

в) произведение чисел на них. Можно ли хоть в одном случае определить, какие числа написаны на карточках?

2. В каждой клетке таблицы  $5 \times 5$  написано вещественное число. За ход можно узнать сумму чисел в любой доминошке.

а) Докажите, что изначально числа могли быть расставлены так, что по полученным ответам нельзя узнать сумму всех чисел в таблице.

б) Докажите, что по полученным ответам никогда не удастся выяснить сумму чисел в таблице.

3. Все виды растений России были занумерованы подряд числами от 2 до 2025 (числа идут без пропусков и повторений). Для каждой пары видов растений запомнили

наибольший общий делитель их номеров, а сами номера были забыты (в результате сбоя компьютера). Можно ли для каждого вида растений восстановить его номер?

4. На каждой из пяти карточек написано какое-то число. Карточки лежат на столе числами вниз. Мы можем, заплатив рубль, указать на любые три карточки, и нам сообщат сумму написанных на них чисел. За какую наименьшую цену можно наверняка узнать сумму всех пяти чисел?

5. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель её туда передвигает, не сообщая Фуку. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока он не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться того, чтобы после слова «стоп»

а) каждая карта наверняка оказалась не там, где была вначале?

б) рядом со свободным местом наверняка не было туза пик?

6. Детектор — это устройство, которое за одно действие (тестирование) про любое выбранное подмножество монет сообщает, содержится в нем фальшивая или нет. Докажите, что тремя детекторами, из которых один сломан (то есть отвечает произвольно), можно из 8 монет найти фальшивую за 6 тестирований.

## 6. Графы. 5 июля

1. Построили граф, степени вершин которых равны 8, 7, 4, 4, 4, 2, 2, 1,  $x$ . Чему может быть равна степень  $x$ ?

2. В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

3. У Маши 5 друзей среди одноклассников. У остальных её одноклассников 4, 6 или 8 друзей. И только у новичка Саши всего один друг. Докажите, что Маша может отправить Саше записку, если каждый будет передавать записку одному из своих друзей.

4. Назовём граф *хлипким*, если степень любой его вершины равна 1, 3 или 6. Доказать, что из связного хлипкого графа, содержащего 34 ребра, можно выкинуть ребро так, что он перестанет быть связным.

5. В стране 100 городов, причем каждый соединён с каждым дорогой. Докажите, что если закрыть на ремонт 98 дорог, то граф дорог останется связным.

6. Страна состоит из больших и малых городов. Каждый город (и малый, и большой) соединён дорогами с тремя малыми городами и с тремя большими городами. Докажите, что общее число городов в стране делится на 4.

7. У каждого марсианина по три руки и несколько антенн. Каждый марсианин взял за руки трех других (так, что все руки оказались заняты). Оказалось, что у любых двух марсиан, взявшихся за руки, количество антенн отличается ровно в 6 раз. Может ли суммарное количество антенн быть 2025?

8. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими. И из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

9. В стране 10 городов. Любые два города соединены дорогой, если и только если из них выходит одинаковое число дорог. Может ли число дорог равняться 20? А 21?

### *Дополнительные задачи*

10. В районе несколько сёл и три деревни. Из каждого села выходят 3 дороги, а из деревень — по одной. Каждая дорога соединяет два населенных пункта и обслуживается одной из трёх бригад. Дороги, выходящие из села, обслуживаются разными бригадами. Докажите, что дороги, выходящие из деревень, тоже обслуживаются разными бригадами.

11. В стране Эйлерии 101 город. Каждые два города соединены двусторонним беспосадочным рейсом одной из 99 авиакомпаний. Известно, что из каждого города выходят рейсы всех 99 компаний. Назовём треугольником три города, попарно соединённых рейсами одной и той же компании. Докажите, что в Эйлерии не больше одного треугольника.

12. В кружке 42 человека, любые двое из которых имеют среди кружковцев не менее десяти общих друзей. Докажите, что найдутся двое, имеющие среди кружковцев не менее двенадцати общих друзей.

## Групповое занятие 1. Шляпы. 5 июля

1. По кругу стоят 6 человек, каждый из них видит, какое число написано на шляпе у остальных, но на своей шляпе он число не видит. Известно, что сумма всех чисел равна 15 или 16. Необходимо хотя бы двоим угадать свое число. Как им действовать?

2. Шесть человек стоят по кругу, каждому на голову надевают шляпу. Известно, что на шляпах написаны последовательные натуральные числа. Каждого просят написать число на своей шляпе. Он может либо написать «не знаю», либо написать свое число.

Выигрывают эти люди в случае, если хотя бы трое угадают свои числа. Как им выиграть?

3. Шестеро стоят по кругу так, что каждый видит каждого. Им надевают шляпу одного из двух цветов: черную или белую. Затем они по очереди называют цвет. Как всем, кроме, возможно, одного, угадать свой цвет своей шляпы?

4. Та же задача, только ученики стоят в ряд так, что каждый видит только впереди стоящих.

5. Та же задача, только шляпы трёх цветов.

6. Шестеро выстроены в колонну (каждый видит тех и только тех, кто находится впереди него), и каждому наденут либо черную, либо белую шляпу случайным образом (известно, что оба цвета присутствуют). Каждый по очереди, начиная с последнего, должен будет назвать цвет своей шляпы либо сказать «пас». Ученики пройдут тест, если все, кто назовут цвет, его угадают, и хотя бы один из них все-таки цвет назовет. Как пройти тест?

7. Шестерым надевают на голову колпак, на котором написаны числа от 1 до 15. Каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или чёрную. После этого все должны одновременно написать число на своем колпаке. Как им действовать?

8. Четыре мудреца стоят по кругу возле непрозрачного баобаба, у них шляпы трёх цветов. Каждый мудрец видит только двух соседних по кругу мудрецов. Выигрывают эти четверо в случае, если хотя бы один угадает свой цвет шляпы. Как им действовать, чтобы выиграть?

## 7. Двумя способами. 7 июля

### Упражнения

1) Каждый посетитель кошачей выставки погладил трёх кошек, при этом каждая кошка была поглажена трижды. Докажите, что число кошек равнялось числу посетителей.

2) По кругу расставлены числа от 1 до 23. Докажите, что сумма некоторых трёх подряд стоящих чисел не меньше 36.

### Задачи

1. На рёбрах куба расставили все числа от 1 до 12, а затем для каждой вершины посчитали сумму чисел на трёх ребрах, выходящих из этой вершины. Могут ли восемь полученных чисел оказаться равными?

2. По кругу в непонятном порядке записаны числа  $1, 2, \dots, 2020$ . Рассматриваем все тройки подряд идущих чисел. 600 из них содержат три нечётных числа, 500 — ровно два нечётных числа. Сколько троек содержат ровно одно нечётное число?

3. Комитет провел 40 заседаний, на каждом было ровно 10 присутствующих. При этом каждые два члена комитета встретились не более чем на одном заседании. Докажите, что в комитете более 60 членов.

4. Однажды в СССР в автобусе без кондуктора ехали 40 пассажиров, имевших при себе только монеты достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Всего у пассажиров было 49 монет. Докажите, что пассажиры не могли купить нужное количество билетов и правильно рассчитаться между собой. (Стоимость автобусного билета в СССР составляла 5 копеек.)

5. Докажите, что в клетки шахматной доски нельзя расставить несколько шашек таким образом, чтобы во всех строках и столбцах стояло чётное число шашек, а на всех 26 диагоналях, длина которых больше одной клетки, нечётное.

### *Дополнительные задачи*

6. Сколькими способами можно расставить числа  $\pm 1$  в таблицу  $2021 \times 2021$  так, чтобы произведения в каждом столбце и в каждой строке равнялись бы  $-1$ ?

7. Есть кучка из 100 конфет. За ход можно взять какую-то кучку, и разделить её на две кучки из  $a > 0$  и  $b > 0$  конфет. При этом на доску записывается число  $a \cdot b$ . Чему будет равна сумма всех выписанных чисел, когда ходы закончатся?

8. Какое наибольшее количество подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  можно выбрать таким образом, что объединение любых двух множеств есть  $\{1, 2, \dots, n\}$ ?

9. Какое наибольшее количество подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  можно выбрать таким образом, что объединение любых трёх множеств есть  $\{1, 2, \dots, n\}$ ?

10. Клетки таблицы  $100 \times 100$  заполнены натуральными числами от 1 до 100, причём каждое число встречается ровно 100 раз. Докажите, что в некоторой строчке или некотором столбце встречается не менее 10 различных чисел.

## 8. Делимость—3. 7 июля

**Определения.** Наименьшее общее кратное (НОК) нескольких натуральных чисел — наименьшее натуральное число, которое делится нацело на каждое из этих чисел. Наибольший общий делитель (НОД) нескольких натуральных чисел — наибольшее натуральное число, являющееся делителем каждого этих чисел. Если НОД двух чисел равен 1, то они называются *взаимно простыми*.

**Алгоритм Евклида.** Для того, чтобы найти НОД двух чисел  $a$  и  $b$ , нужно выполнить последовательно несколько делений с остатком:

$$a = b \cdot q_1 + r_1$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$$

$$\dots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}$$

На каждом шаге предыдущий делитель делится с остатком на предыдущий остаток. Так продолжается до тех пор, пока на каком-то шаге остаток не станет равен 0. Последний ненулевой остаток равен НОД( $a, b$ ).

**Теорема (о линейном представлении НОД).** Для любых двух целых чисел  $a$  и  $b$  найдутся такие целые числа  $x$  и  $y$ , что  $\text{НОД}(a, b) = ax + by$ .

### Свойства

- Если натуральные числа  $a$  и  $b$  поделить на их НОД, то полученные результаты будут взаимно простыми.
- Если  $(a, b) = 1$  и  $ac$  делится на  $b$ , то  $c$  делится на  $b$ .
- $ab = \text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b)$

**Упражнение.** Найдите представление наибольшего общего делителя чисел 391 и 253 в виде  $391u + 253v$  для некоторых целых чисел  $u$  и  $v$ .

### Задачи

1. Сократите дробь  $\frac{1584231}{637470}$ .
2. Найдите представление наибольшего общего делителя чисел 117 и 92 в виде  $117u + 92v$  для некоторых целых чисел  $u$  и  $v$ .
3. Найдите
  - а)  $\text{НОД}(\underbrace{77\dots7}_{100 \text{ цифр}}, \underbrace{77\dots7}_{14 \text{ цифр}})$ ;
  - б)  $\text{НОД}(99! + 100!, 101! + 102!)$ ;
  - в)  $\text{НОД}(99! + 100, 101!, 101! + 102)$ .
4. Найдите пару натуральных чисел, если известно, что
  - а) их НОД равен 56, а НОК — 112; б) НОД равен 12, а НОК — 864.

5. Докажите, что следующие дроби несократимы при любом натуральном  $n$ :

а)  $\frac{2n^2 - 1}{n + 1}$ ;

б)  $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$ ;

в)  $\frac{12n + 1}{30n + 2}$ .

6. Найдите все целые  $n$ , при которых сократима дробь

а)  $\frac{n^2 + 2n + 4}{n^2 + n + 3}$ ;

б)  $\frac{n^3 - n^2 - 3n}{n^2 - n + 3}$ .

7. Натуральные числа  $m$  и  $n$  таковы, что  $\text{НОК}(m, n) + \text{НОД}(m, n) = m + n$ . Докажите, что одно из этих чисел делится на другое (и поймите, что обратное утверждение очевидно).

8. Про натуральное число  $n$  известно, что  $\text{НОД}(1000, n) = 4$  и  $\text{НОД}(1000, n + 1) = 5$ . Чему равен  $\text{НОД}(1000, n + 2)$ ?

9. Выбрали шесть натуральных чисел. Для каждой пары выписали её НОД. Могли ли в результате быть выписанными числа 1, 2, ..., 15?

10. Дмитрий Николаевич записал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашёл их наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и  $N$ , где  $N > 5$ . Какое наименьшее значение может иметь число  $N$ ?

### *Дополнительные задачи*

11. Пусть  $n$  — натуральное число. Петя выбрал  $k$  различных натуральных чисел, не превосходящих  $n$ . Затем Вова выписал всех их попарные суммы. Оказалось, что среди выписанных чисел нет двух различных, одно из которых делится на другое. При каком наибольшем  $k$  такое могло произойти?

12. У Пети есть 1000 карточек, на каждой из которых написано два натуральных числа: одно синим цветом, другое — красным. Петя заметил, что если взять любые две карточки, то разность синих чисел на этих карточках не будет делиться на НОД красных чисел на этих карточках. Докажите, что сумма чисел, обратных к красным, не превосходит 1.

13. Найдите все натуральные числа  $n$  такие, что число  $2^n - 2n$  — квадрат целого числа.

## 9. Инвариант. 8 июля

### Упражнения

- 1) Может ли слон на шахматной доске за несколько ходов попасть с поля  $a1$  на  $a8$ ?
- 2) Каждым ходом компьютер увеличивает число на экране. Если сумма цифр числа делится на 4, он увеличивает число на сумму цифр, а если не делится, то увеличивает на 10. Вначале на экране было число 13. Может ли получиться число 1000?

### Задачи

1. На доске записано число 1010101010101010101010101010. Можно либо добавить в любой промежуток строчку 1010, либо вычеркнуть строчку 01. Можно ли в конце получить 01?
2. Есть две кучки: в одной 30 шишек, а во второй — 70. Можно увеличить количество шишек в одной куче на 6, но уменьшить количество шишек в другой куче на 1 или уменьшить количество шишек в одной куче на 3, а в другой — на 7. Можно ли при помощи таких действий получить в одной куче 71 шишку, а в другой — 53?
3. На доске записаны три числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Каждую секунду Ваня стирает числа и меняет на  $a + b - c$ ,  $c + a - b$ ,  $b + c - a$ . Вначале на доске был набор чисел 2022, 2023, 2024. Может ли через некоторое время получиться набор 2023, 2024, 2025?
4. В ряд стоят 40 шестиклассников. Кирилл Вячеславович выбирает двух школьников, стоящих через одного, и меняет их местами. Он хочет переставить детей в обратном порядке. Получится ли у него выполнить своё желание?
5. В алфавите языка племени ЛОО всего две буквы: Л и О. Известно, что смысл слова не изменится если из слова выкинуть стоящие рядом буквы ОЛ и при добавлении в любое место слова буквосочетания ЛО или ООЛЛ. Можно ли утверждать, что слова ЛОО и ОЛЛ имеют одинаковый смысл?
6. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят (если делится нацело) на 2 или на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не может быть равно 54.
7. Дана доска  $8 \times 8$ , раскрашенная в шахматном порядке. За одно действие можно выбрать любые две соседние клетки и перекрасить их в противоположные цвета: белые в чёрный, а чёрные в белый. Можно ли за несколько действий оставить на доске ровно одну черную клетку?
8. Даны три кучки камней, по  $n$  камней в каждой. За один ход можно выбрать две кучки, убрать из них по одному камню, при этом добавив один камень в третью кучку. При каких  $n$  можно через несколько ходов оставить только один камень?

9. В таблице  $9 \times 9$  одна из угловых клеток закрашена чёрным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

10. В таблице  $5 \times 5$  расставлены единицы и нули (по одному числу в каждой клетке). За один ход разрешается в любом квадрате  $3 \times 3$  заменить все единицы нулями, а нули — единицами. При любой ли расстановке единиц и нулей за несколько таких операций можно получить таблицу из одних нулей?

11. На поле  $6 \times 7$  расставлены единицы и нули. Разрешается взять любой прямоугольник  $1 \times 5$  и инвертировать в нём цифры. Всегда ли можно за несколько таких ходов получить таблицу из одних нулей?

12. На доске написаны натуральные числа от 1 до 100, каждое по одному разу. Каждую минуту мальчик Петя выбирает два числа  $a$  и  $b$ , написанных на доске, вычисляет  $\text{НОД}(a^2 + b^2 + 2, a^2b^2 + 3)$ , пишет его на доску, а сами числа стирает. Через 99 минут на доске останется одно число. Докажите, что оно не может быть квадратом.

## 10. Комбинаторика—1. 8 июля

1. Сколько существует пятизначных чисел, в которых все цифры различные и
  - а) нечётные;
  - б) чётные;
  - в) не все нечётные?
2. Сколько существует шестизначных чисел, которые
  - а) не содержат в записи цифру 7?
  - б) содержат в записи цифру 7?
  - в) содержат в записи хотя бы две цифры 7?
3. а) Сколькими способами можно поставить на шахматную доску двух разноцветных коней, не бьющих друг друга?  
 б) А двух одноцветных коней, не бьющих друг друга?
4. Сколькими способами из комплекта доминошек можно выбрать две стыкующиеся доминошки (то есть один квадратик у них одинаковый)?
5. У скольких девятизначных чисел все цифры различны, сумма каждой пары соседних цифр нечётна, а само число делится на 4?
6. Меню в школьном буфете состоит из 7 блюд. Миша хочет каждый день завтракать по-новому, выбирая на завтрак любое количество различных блюд (но обязательно он

что-то хочет брать). Сколько дней ему это удастся? Сколько всего блюд он съест за это время?

7. Отмечена точка пересечения двух прямых и, кроме неё, 5 точек на одной прямой и 7 точек на другой. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

8. Маленький Митя знает только шесть цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6. В минуты досуга он выписал все пятизначные числа, состоящие из этих цифр. Сколько чисел среди выписанных делятся на шесть, если

а) все цифры в числе различны?

б) цифры в числе могут повторяться?

9. Есть 200 различных карточек с числами  $2, 3, 2^2, 3^2, \dots, 2^{100}, 3^{100}$  (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было кубом целого числа?

10. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, не содержащих цифр 7 и 8, но обязательно содержащих и 1, и 2?

### *Дополнительные задачи*

11. Сколькими способами можно вырезать прямоугольник из шахматной доски  $8 \times 8$  (по сторонам клеток) так, чтобы количество белых и чёрных клеток было поровну?

12. Сколькими способами можно раскрасить в два цвета клетки полосы  $2 \times 8$  так, чтобы не нашлось одноцветного трёхклеточного уголка? (Варианты, отличающиеся поворотом, считаются различными)

13. Сколькими способами можно раскрасить в два цвета клетки доски  $8 \times 8$  так, чтобы не нашлось одноцветного трёхклеточного уголка? (Варианты, отличающиеся поворотом, считаются различными)

## 11. От противного. 9 июля

### *Упражнения*

1) Можно ли разложить 44 шарика на 9 непустых кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

2) Девять чисел таковы, что сумма каждых четырех из них меньше суммы пяти остальных. Докажите, что все числа положительны.

3) Семь грибников собрали вместе 59 грибов, причем любые двое собрали разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.

**Задачи**

1. Отрицание общего высказывания — высказывание о существовании. Постройте отрицания:

- а) Все попугаи понимают то, что говорят.
- б) Все натуральные числа делятся на три.
- в) Ни один бегемот не умеет летать.
- г) Каждый мальчик умывается по утрам.

2. Отрицание высказывания о существовании — общее высказывание. Постройте отрицания:

- а) Некоторые шестиклассники могут съесть три тарелки супа за обедом.
- б) Бывают преподаватели, которые спят по ночам.
- в) Некоторые последовательные натуральные числа имеют суммы цифр, являющиеся точными квадратами.
- г) Есть гитаристы, которые не умеют петь.

3. Постройте отрицания:

- а) Существует наименьшее положительное число.
- б) В каждой корзинке не более 17 пирожков.
- в) Каждый день хотя бы одна мудрилка ходит в гости.
- г) Каждый день все школьники М6 решают все предложенные задачи.
- д) В таблице сумма в каждой строке и каждом столбце чётна.
- е) В последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  для каждого  $\varepsilon > 0$  найдётся такой номер  $n_0$ , что при всех  $n > n_0$  выполняется неравенство  $|a_n| < \varepsilon$ .

4. Ученик за одну неделю получил 13 оценок (из набора 2, 3, 4, 5), среднее арифметическое которых — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

5. В клетках таблицы  $10 \times 10$  расставлены числа  $-1, 0, 1$ . Могло ли оказаться, что все суммы чисел в строках, столбцах и главных диагоналях различны?

6. Есть 7 различных натуральных чисел, сумма которых равна 100. Докажите, что сумма некоторых трёх из них не меньше, чем 50.

7. Семь различных целых чисел таковы, что сумма любых трёх из них меньше суммы четырёх остальных. Докажите, что все числа не меньше 10.

8. Числа от 1 до 50 написаны на карточках. Можно ли разложить эти карточки в 11 стопок так, чтобы в каждой стопке произведение чисел на карточках делилось на 9?

**Дополнительные задачи**

9. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

**10.** В классе учится 30 учеников, один из них — Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно 5 общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечётным числом друзей.

**11.** На Дэнс-шоу пришли 125 человек, причём каждый был знаком ровно с 10 другими. После третьего тура некоторые не прошли в финал и ушли пить кефир на вечерний чай. Оказалось, что оставшиеся по-прежнему имели одинаковое число знакомых среди оставшихся в зале. Докажите, что среди ушедших были знакомые друг с другом.

## 12. Комбинаторика–2. 9 июля

**1.** Сколько разных слов можно получить перестановкой букв в слове

- а) КРЮК;
- б) КРОКОДИЛ;
- в) КРОКОДИЛООБРАЗНЫЙ?

**2.** Сколько разных натуральных чисел можно составить из трёх единиц, трёх двоек и трёх нулей?

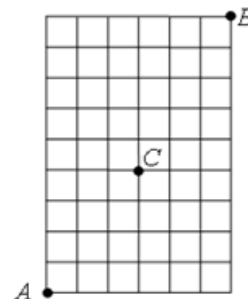
**3.** Проводится турнир, в котором участвует 2025 команд. В следующий тур выходят команды, занявшие первые три места. Сколькими способами могут быть определены эти три команды? Четыре? А  $k$  команд из участвующих  $n$  ( $0 \leq k \leq n$ )?

**4.** В группе 6 класса занимаются 4 девочек и 12 мальчиков. Для участия в турнире необходимо составить команду из 6 человек. Сколькими способами можно это сделать, если

- а) в команду должны входить только мальчики;
- б) в команду должны входить все девочки;
- в) в команде должно быть поровну девочек и мальчиков;
- г) в команде должно быть не меньше двух девочек?

**5.** а) На рисунке изображён план города, разбитого на прямоугольные кварталы. Пешеход хочет пройти из пункта  $A$  в пункт  $B$  кратчайшим путём. Сколькими различными способами он сможет это сделать?

б) Тот же вопрос, если пешеход не хочет по пути проходить через точку  $C$ .



**6.** Сколькими способами на вершинах данного выпуклого 2025-угольника можно построить:

- а) выпуклых четырёхугольников;

б) четырёхзвенных замкнутых ломаных? (Напомним, выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали).

7. Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

8. а) В классе 10 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами они могут образовать 10 танцевальных пар, где мальчик танцует с девочкой?

б) В классе 20 человек. Каждый день дежурят двое. Сколькими способами можно составить график дежурств на 10 дней, чтобы никто не дежурил дважды?

в) Сколькими способами можно разбить 20 человек на пары?

9. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек», чтобы все 4 буквы «е» не стояли подряд?

10. Сколькими способами можно выбрать три попарно различных числа от 1 до 30 так, чтобы их сумма делилась на 3?

11. Улитка должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины 10, начав и закончив свой путь в одном и том же узле сетки. Сколькими способами она может это сделать?

### *Дополнительные задачи*

12. На клетчатой доске  $10 \times 10$  пьяный король может ходить на одну клетку вверх, вправо или вправо-вверх по диагонали, но не может делать два хода подряд в одном направлении. Он прошёл из левого нижнего в правый верхний угол за минимальное возможное для него число ходов. Сколько есть разных маршрутов для такого подвига?

13. Карусель состоит из 33 одинаковых серых сидений, расположенных по кругу. Сколькими способами можно покрасить 4 сиденья в красный цвет так, чтобы не было двух красных сидений подряд?

14. В языке племени УЫ всего две буквы: У и Ы. Словом считается любая последовательность из  $2n$  букв У и  $2n$  букв Ы (число  $n$  дано и фиксировано). Языковеды называют слова похожими, если одно можно получить из другого одной перестановкой двух соседних букв У и Ы. Какое наибольшее количество слов можно выписать на доску так, чтобы любые два из выписанных слов не были похожи? В записи ответа допустимы только четыре арифметические операции, возведение в степень, взятие факториала и стандартных комбинаторных величин, там не должно содержаться многоточий и число использованных операций не должно зависеть от  $n$ .

## 13. Целочисленные неравенства. 9 июля

### Упражнения

1) Винни-Пух, Сова, Кролик и Пятачок съели 70 бананов, причем каждому досталось хотя бы по одному банану. Винни-Пух съел больше, чем каждый из остальных; Сова и Кролик вместе съели 45 бананов. Сколько бананов съел Пятачок?

2) Про натуральные числа  $a, b$  известно, что  $a + 3b$  делится на 777 и  $2a + b$  делится на 777. Докажите, что  $a + b \geq 777$ .

Таким образом, мы получаем две крайне полезные идеи:

**Идея 1.** Если  $a > b$ , при этом  $a, b$  — целые числа, то данное неравенство равносильно неравенству  $a \geq b + 1$ .

**Идея 2.** Если  $a$  делится на число  $b$ , то  $a \geq b$ .

### Задачи

1. Про натуральные числа  $a, b, c$  известно, что  $ab : 8c, bc : 9a, ac : 10b$ . Докажите, что  $abc \geq 720$ .

2. По итогам математической олимпиады восемь участников получили 97 книг. За более высокое место давали больше книг. Известно, что все участники получили разное число книг, причем за последние два места книг было вручено больше, чем за первое место. Сколько книг получил каждый из восьми участников? Найдите все решения и покажите, что других нет.

3. Найдите наименьшее такое натуральное  $n$ , что  $(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)$  делится на 1000.

4. Среди 20 различных натуральных чисел есть 11 чисел, кратных 13 и 13 чисел, которые кратны 11. Докажите, что среди них есть число, которое больше 500.

5. Даны натуральные числа  $a$  и  $b$  такие, что число  $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$  является целым числом. Докажите, что  $\text{НОД}(a, b)^2 \leq a + b$ .

## 14. Деревья. 10 июля

**Определения.** *Циклом* называется замкнутый путь по рёбрам графа без повторяющихся рёбер. *Простым циклом* называется цикл без повторяющихся вершин. Связный граф называется *деревом*, если в нём отсутствуют циклы. Граф (не обязательно связный), в котором отсутствуют циклы, называется *лесом*. Вершина графа, степень которой равна одному, называется *висячей*.

**Определение.** *Скелетом (остовным деревом)* связного графа называется подграф исходного графа с тем же набором вершин, который является деревом.

### Утверждения

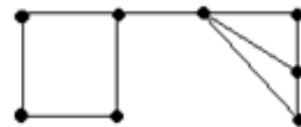
- Если в дереве более одной вершины, то в нём есть две висячие вершины.
- Если из дерева выкинуть любое ребро, то оно перестанет быть связным.
- В дереве на  $n$  вершинах ровно  $n - 1$  ребро.
- Из любого связного графа можно выкинуть несколько рёбер (возможно, ни одного) так, что останется дерево. В любом связном графе на  $n$  вершинах имеется как минимум  $n - 1$  ребро.

### Задачи

1. Степени вершин дерева равны  $5, 4, 3, 2, 1, 1, \dots, 1$ . Сколько в этом графе висячих вершин?

2. Вася нарисовал на доске 8 графов, каждый из которых является деревом с шестью вершинами. Докажите, что среди них есть два «одинаковых» (изоморфных).

3. Сколько остовных деревьев имеет граф, изображенный на рисунке?



4. Можно ли раскрасить рёбра куба в синий и красный цвета так, чтобы рёбра каждого цвета образовывали связный граф, проходящий по всем вершинам?

5. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдётся замкнутая ломаная из красных отрезков.

6. а) Докажите, что из любого связного графа можно выкинуть одну вершину со всеми выходящими из нее рёбрами так, чтобы он остался связным.

б) В связном графе есть вершина степени  $n$ . Докажите, что в этом графе можно выделить  $n$  вершин так, чтобы при удалении любого набора из этих вершин, граф оставался связным.

7. Докажите, что вершины дерева можно покрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние вершины были покрашены в разные цвета.

8. В стране 15 городов. Некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полёты, можно будет добраться из любого города в любой другой, пользуясь оставшимися авиалиниями. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в этой стране?

9. В связном графе  $n$  вершин и  $2n - 1$  рёбер. Докажите, что из этого графа можно выкинуть все рёбра некоторого цикла так, чтобы он остался связным.

**10.** В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, причём из любого города можно добраться самолетом до любого другого (возможно, с пересадками). Министерство региональной политики рассматривает все возможные проекты разбиения страны на 3 республики так, что никакие два города из одной республики не соединены авиалинией. Докажите, что количество таких проектов не превосходит  $3 \cdot 2^{99}$ .

## Внутренний матбой М6 (группа 1). 10 июля

**1.** На доске  $100 \times 100$  лежит 800 фигурок Г-тетрамино так, что они не перекрываются, и любая такая фигурка занимает ровно 4 клетки доски (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Докажите, что на доску можно положить ещё хотя бы одну фигурку Г-тетрамино так, чтобы они все ещё не перекрывались.

**2.** В ряд расположено 100 монет. Изначально первые 50 монет лежат орлом вверх, а остальные — решкой. Аня и Ваня ходят по очереди, начинает Аня. За один ход Аня может выбрать две соседние монеты, одна из которых лежит орлом вверх, а другая — решкой, и перевернуть обе эти монеты. Ваня за свой ход может выбрать две соседние монеты, обе лежащие орлом вверх или обе лежащие решкой вверх, и перевернуть их. Если какой-то из игроков не может сделать свой ход, игра заканчивается. Ваня хочет, чтобы в какой-нибудь момент все монеты оказались решкой вверх. Может ли он играть так, чтобы гарантированно добиться желаемого?

**3.** На вечеринке присутствовали 2021 человек, некоторые из них являются друзьями. Назовём *популярностью* человека размер наибольшей группы людей, в которую он входит, такой, что любые двое из этой группы дружат между собой. Если у человека нет друзей на вечеринке, его популярность равна единице. Какое наибольшее число различных популярностей может быть у присутствующих на вечеринке?

**4.** Пусть  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  —  $k$  наименьших нечётных простых чисел ( $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$  и т.д.), и  $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ . Докажите, что среди чисел от 1 до  $N$  ровно  $\frac{N}{2}$  чисел имеют нечётное число различных простых делителей, не превосходящих  $p_k$ .

**5.** Вася выбрал 800 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, и расставил их по кругу. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых не делится на следующее по часовой стрелке число.

**6.** У Оли есть  $n$  гирек, масса каждой из которых натуральное число граммов, а суммарная масса — 2021 грамм. При каком наименьшем  $n$  гири обязательно можно разбить на несколько групп с равными массами?

**7.** В Азкабанах 2021 камера. Камеры расположены в ряд  $1 \times 2021$ . В первой (самой левой) камере сидят 100 узников, а в оставшихся камерах — по одному узнику. Узники

хотят сбежать из Азкабана и для этого ломают стены между камерами, а из последней камеры (самой правой) — стену наружу. Ровно в полночь каждый узник начинает ломать стену между камерой, в которой он находится, и следующей за ней справа камерой. А узник в самой правой камере ломает стену наружу. Если узники сломали стену, то они мгновенно перемещаются в следующую камеру и начинают ломать стену там. Все узники работают с постоянной скоростью 1 стена в час. Все узники оказались на свободе через  $\frac{m}{n}$  часов. Найдите  $m + n$ , если известно, что дробь  $\frac{m}{n}$  несократима.

8. На доске написано 10-значное число. За одну операцию число на доске умножают на 6 и стирают его первую цифру. Через несколько операций на доске оказалось число, равное исходному. Докажите, что оно делится на 1024.

## Внутренний матбой М6 (группа 2). 10 июля

1. Пять мальчиков и пять девочек собрали 100 грибов. При этом девочки собрали по различному количеству грибов, а каждые три мальчика собрали вместе не менее 45 грибов. Сколько грибов собрал каждый, если у любых двух грибников количества собранных ими грибов отличаются не больше, чем в 5 раз?

2. Вася и Петя играют в такую игру. На столе лежит две кучи по 100 камней в каждой. Вася начинает. Своим ходом он может взять половину камней из любой кучи с четным числом камней (если во всех кучах нечетное число камней, то он пропускает ход). Петя своим ходом может взять один камень из любой кучи. Выигрывает тот, кто оставит в одной из куч ровно 1 камень. Кто выиграет при правильной игре?

3. Дан клетчатый квадрат  $9 \times 9$ . Будем называть кораблем фигуру, состоящую из нескольких клеток, образующих прямоугольник  $1 \times 1$ ,  $1 \times 2$ ,  $1 \times 3$  или  $1 \times 4$ . Будем говорить, что корабли расположены хорошо, если никакие два корабля не содержат соседних по стороне или углу клеток. Какое наименьшее суммарное число клеток могут содержать несколько хорошо расположенных кораблей, если при добавлении к ним любого корабля расположение перестанет быть хорошим?

4. В колоде 36 карт: по 9 карт каждой из 4 мастей. Эту колоду раздали на шестерых игроков (не обязательно поровну, но каждому хотя бы по одной карте). Оказалось, что никакие двое игроков не могут из розданных им карт выбрать 4 карты разных мастей. Докажите, что тогда либо есть игрок, у которого все карты имеют одну масть, либо есть масть, карты которой есть у всех игроков.

5. На столе лежат 9 монет, шесть из них лежат «орлом» вверх, остальные — «орлом» вниз. Вася за первый ход может перевернуть восемь монет, за второй — семь, за третий — шесть, и т. д., за восьмой — одну монету. Вася действовал так, что в конце все монеты легли одинаково. Покажите, как он мог действовать.

6. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Встретились три островитянина: Петя, Вася и Толя. Петя сказал: «Мы все лжецы». Вася на это ему ответил: «Нет, только ты». Кто такой Толя — рыцарь, или лжец?

7. Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что натуральное число  $a - b$  делится на натуральное число  $3b - a$ . Докажите, что тогда и число  $2b$  делится на  $3b - a$ .

8. Два последовательных трёхзначных числа записали одно рядом с другим. Докажите, что полученное число не может делиться на 1001.

## 15. Раскраски. 12 июля

### Упражнения

1) В ряд стоят 40 шестиклассников. Кирилл Вячеславович выбирает двух школьников, стоящих через одного, и меняет их местами. Он хочет переставить детей в обратном порядке. Получится ли у него выполнить своё желание?

2) Из шахматной доски вырезали клетки  $a1$  и  $h8$ . Возможно ли оставшуюся доску разбить на доминошки?

3) Возможно ли замостить квадрат  $6 \times 6$  замостить Г-тетрамино?

### Задачи

1. Можно ли из 13 кирпичей  $1 \times 1 \times 2$  сложить куб  $3 \times 3 \times 3$  с дыркой  $1 \times 1 \times 1$  в центре?

2. На столе лежат 100 карточек с числами. Андрей и Дима по очереди берут карточку с одного из краёв ряда. Когда карточки разобраны каждый мальчик вычисляет сумму на своих карточках. Докажите, что Андрей, который начинает ходить, сможет получить в конце сумму не меньше, чем Дима.

3. Квадрат  $1000 \times 1000$  заполняют числами от 1 до миллиона: в какой-то клетке пишут 1, в соседней по стороне клетке — 2, в соседней по стороне с числом 2 пишут 3, и т.д. Андрей вырезал четырёхклеточную фигурку, сумма чисел в которой равна 2025. Какую форму имеет эта четырёхклеточная фигура?

4. Концы  $N$  хорд разделили окружность на  $2N$  дуг единичной длины. Известно, что каждая из хорд делит окружность на две дуги чётной длины. Докажите, что число  $N$  чётно.

5. На каждой клетке доски размером  $9 \times 9$  сидит жук. По свистку каждый из жуков переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом в некоторых клетках может оказаться больше одного жука, а некоторые клетки окажутся незанятыми. Докажите, что при этом незанятых клеток будет не меньше 9.

6. На клетчатом листке выбрано 2024 клеток. Докажите, что можно выбрать 506 из них так, чтобы никакие две клетки не были соседями по стороне или углу.

7. Некоторую фигурку сложили из прямоугольничков  $1 \times 9$  и квадратов  $3 \times 3$ . Один прямоугольничек из этого набора потеряли и заменили на квадрат. Докажите, что теперь ту же фигуру сложить не получится.

8. По кругу расставлены 12 лампочек. Разрешается одновременно поменять положение трёх подряд идущих (включить выключенные и наоборот). Докажите, что если изначально горела ровно одна лампочка, то только такими операциями нельзя зажечь их все одновременно.

9. В квадрате  $7 \times 7$  клеток размещено 16 плиток размером  $1 \times 3$  и одна плитка  $1 \times 1$ . Докажите, что плитка  $1 \times 1$  либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата.

10. Квадрат  $11 \times 11$  разрезали на Z-тетрамино и единичные квадратики. Какое наименьшее число единичных квадратов может быть в таком разрезании?

11. Хромая ладья обошла всю шахматную доску по замкнутому маршруту, побывав на каждой клетке ровно по разу. Докажите, что число ходов по горизонтали не равно числу ходов по вертикали.

## 16. Делимость—4. 12 июля

**Теорема (основная теорема арифметики; ОТА).** Любое натуральное число  $a \neq 1$  единственным способом (с точностью до порядка сомножителей) представляется в виде произведения простых чисел.

**Определение.** Натуральное число  $n$  называется *точным (полным) квадратом*, если найдется натуральное число  $k$  такое, что  $n = k^2$ .

### Мудрые факты

- Любое натурального число  $a$  лежит между двумя квадратами, то есть для любого  $a$  найдется  $n$ , что  $n^2 \leq a < (n+1)^2$ .
- Если  $n^2 < a < (n+1)^2$ , то  $a$  не является точным квадратом.
- Количество делителей числа нечётно тогда и только тогда, когда число является точным квадратом.

**Определение.** Степенью вхождения простого числа  $p$  в натуральное число  $n$  будем называть наибольшее такое  $k$ , что  $n$  делится на  $p^k$ . Обозначать для краткости будем  $\nu_p(n)$  (это греческая буква “ню”).

### Ещё мудрые факты

- $\nu_p(a + b) \geq \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$ , причём  $\nu_p(a + b) = \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$ , только если  $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$ .
- $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$ .
- Если натуральное число  $a$  делится на  $b$ , то  $\nu_p(a) \geq \nu_p(b)$ .
- $\nu_p(\text{НОД}(a, b)) = \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$ .
- $\nu_p(\text{НОК}(a, b)) = \max\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$ .

### Задачи

1. Найдите решение ребуса  $AB \cdot B\Gamma = ДДЕЕ$ .
2. При каких  $n$  число  $(n - 1)!$  делится на  $n$ ?
3. Все простые числа, не превосходящие простого числа  $p$ , разбили на две группы и нашли произведение всех чисел в каждой из групп, после чего из большего произведения вычли меньшее. Эта разность оказалась меньше  $p$ . Докажите, что она равна 1.
4. Решить в натуральных числах уравнение  $n! + 57 = k^2$ .
5.  $a$ ,  $b$  и  $c$  — натуральные числа такие, что  $a^3$  делится на  $b$ ,  $b^3$  делится на  $c$ , а  $c^3$  делится на  $a$ . Докажите, что  $(a + b + c)^{13}$  делится на  $abc$ .
6. Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что сумма  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$  целая. Докажите, что оба слагаемых целые.
7. Взаимно простые в совокупности натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  удовлетворяют условию  $ab = ac + bc$ . Докажите, что  $abc$  — точный квадрат.
8. Найдите все натуральные  $n$ , для которых  $n! + 3n^2$  — квадрат натурального числа.

### Дополнительные задачи

9. Существуют ли такие натуральные числа  $a$  и  $b$ , что  $(2a + 2b)! - ab$  является точным квадратом.
10. Докажите, что при любых натуральных  $a$  и  $d$  в последовательности  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$  найдутся 100 подряд идущих членов, не являющихся квадратами натуральных чисел.
11. Докажите, что число  $n!$  является суммой двух натуральных степеней двойки лишь для конечного количества значений  $n$ .
12. Петя выписал на доску натуральное число  $N$ . Каждую минуту он берет число  $M$ , полученное из  $N$  перемещением первой цифры числа  $N$  в конец, а затем вместо  $N$  на

доску записывает число  $N + M$ . Мог ли он через некоторое ненулевое количество шагов получить число, которое при увеличении на 3 будет натуральной степенью числа 2025?

## Групповое занятие 2. Изоморфизм задач. 13 июля

Разбейте задачи на группы эквивалентных и решите одну из каждой группы.

1. На чудо-дереве растет 10 апельсинов и 9 бананов. Каждый день садовник снимает с дерева ровно два фрукта. Причём, если он снимает одинаковые фрукты, то на дереве появляется новый банан, а если разные — новый апельсин. В конце концов на дереве останется один фрукт. Какой?

2. На столе в ряд выставлены 11 шашек. Олег и Артём по очереди забирают либо одну шашку, либо две рядом стоящие. Выигрывает тот, кто заберет последнюю. Начинает Олег. Кто выиграет при правильной игре?

3. Имеется две кучки 9 камней и 10 камней. За один ход можно взять сколько угодно камней из любой (но только одной) кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

4. На доске выписаны все числа от 1 до 97. Гриша расставляет между ними знаки «+» и «−» так, чтобы в результате получился ноль. Сможет ли он это сделать?

5. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками отметили ещё по точке. Такое «уплотнение» повторили еще раз. В результате на прямой оказалось отмечено 97 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

6. На шахматной доске размером  $10 \times 11$  в левом нижнем углу стоит ферзь. Двое по очереди ходят им вверх, право или вверх-вправо по диагонали (влево и вниз ходить не разрешается). Выигрывает тот, кто первым поставит ферзя в правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре?

7. После обеда Дамир вышел из столовой и решил двигаться вдоль некоторой прямой. Сначала он переместился на 1 шаг в какую-то сторону, затем на два шага, потом на 3 и т.д. Сможет ли Дамир, сделав в очередной раз 97-й шаг, вернуться в начальную точку (то есть снова попасть в столовую)?

8. На доске написаны 11 минусов. За один ход можно исправить либо один, либо два соседних минуса на плюсы. Двое ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

9. На шахматной доске размером  $10 \times 11$  в левом нижнем углу стоит ладья. Двое по очереди ходят ею вверх или вправо (влево и вниз ходить не разрешается).

Выигрывает тот, кто первым поставит ладью в правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре?

**10.** На доске написаны 10 единиц и 9 нулей. За один ход можно стереть любые два числа и, если они были одинаковые, то приписать к оставшимся 0, а если разными, то 1. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы на доске осталась ровно одна единица?

**11.** У фальшивомонетчиков Гоги и Серёги есть 97 монет номиналом от 1 до 97 центов. Они хотят так поделить монеты, чтобы номинальная сумма центов у обоих была одинакова. Смогут ли они это сделать?

**12.** Можно ли прямоугольник  $6 \times 10$  разрезать на прямоугольники  $1 \times 4$ ?

**13.** Имеется две кучки 9 камней и 10 камней. За один ход можно взять сколько угодно камней из любой кучки или по одинаковому числу камней из каждой кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

**14.** В буфете выстроилась очередь за мороженым. Терминал завис, и в каждый промежуток между стоящими успело влезть по человеку. Мороженое еще не начали продавать, и во все промежутки опять влезло по человеку. В итоге продали 97 стаканчиков, и всем стоящим досталось по одному. Сколько человек стояли в очереди первоначально?

**15.** Во дворце фараона Тутанхамона каждая комната имеет одну дверь, через которую можно войти в эту комнату и пять дверей, через которые можно выйти, попав в другую комнату. Спустя много лет ученые откопали этот дворец и вошли в единственный вход. После чего они обошли все комнаты и обнаружили, что 121 дверь открыть нельзя. Сколько комнат они обошли?

**16.** Петя с папой пошли в тир. Уговор был такой: Петя делает 5 выстрелов, а за каждое следующее попадание он получает право сделать ещё два. Всего было сделано 45 выстрелов. Сколько раз Петя попал в цель?

**17.** Сколько упорядоченных наборов можно составить из 11 цифр, если использовать только нули и единицы?

**18.** На столе стоят одиннадцать стаканов, перевёрнутых вверх дном. Разрешается выбрать четыре любых стакана и перевернуть их (т.е. если стакан стоял вверх дном, то он перейдёт в нормальное состояние, а если он был в нормальном состоянии, то переворачивается вверх дном). Можно ли при помощи таких операций добиться того, чтобы все стаканы стояли в нормальном состоянии?

**19.** В большой коробке лежит 5 коробок меньшего размера, в этих пяти коробках вложены ещё коробки так, что в каждой коробке кроме большой либо лежит две

коробки, либо ничего не лежит. Всего 45 коробок. Во скольких коробках лежит по две коробки?

**20.** Болельщик «Спартака», имея два ведра с краской (красной и белой) хочет покрасить забор из 11 досок. Сколькими способами он сможет это сделать?

**21.** На доске написаны 11 чисел  $-1$ . Разрешается выбрать четыре любых числа и каждое умножить на  $-1$  (при этом вместо этих чисел записывается результат умножения). Можно ли с помощью таких операций добиться, чтобы на доске было записано семь единиц?

**22.** В городе Большие Васюки решили провести выборы мэра. Договорились, что работает следующий алгоритм: желающие баллотироваться в мэры, собираются по 5 человек, затем выбирают из них одного и из выбранных собирают снова какую-то пятерку, среди которой выбирают достойного, кто идёт на выборы дальше, и так далее. Выбывшим на каком-то этапе не разрешается участвовать в дальнейших выборах, но зато пятерка может выдвинуть своего представителя в любой момент. Когда останется только пять претендентов, они выбирают среди этой пятерки мэра. Оказалось, что было 17 туров голосований. Сколько было претендентов на пост мэра?

## 17. Двудольные графы. 13 июля

**Определение.** Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета правильным образом, т.е. так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, были покрашены в разные цвета.

**1.** Каждый из учащихся 6 класса знает не меньше половины учащихся 7 класса, а каждый из 7 — не больше половины 6. Докажите, что каждый из учащихся 6 класса знает ровно половину учащихся 7 класса, а каждый из 7 класса — ровно половину 6.

**2.** Можно ли на доске  $2025 \times 2025$  расставить 825 коней, так чтобы каждый бил четырёх других?

**3.** У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

**4.** Дед Мороз принёс на ёлку мешок с подарками. Известно, что количество подарков в мешке не меньше, чем количество детей, пришедших на ёлку. Каждому ребёнку какие-то подарки понравились, а какие-то — не понравились. Всегда ли Дед Мороз сможет подарить каждому ребёнку по одному подарку так, чтобы каждый ребёнок получил подарок, который ему нравится? Решите эту задачу в следующих случаях:

а) каждому ребёнку нравится ровно 2 подарка, и каждый подарок нравится не более, чем 2-м детям;

б) каждому ребёнку нравится не менее 3-х подарков, и каждый подарок нравится не менее, чем 3-м детям;

в) каждому ребёнку хотя бы один подарок нравится, и всем детям нравится разное количество подарков.

**5. Критерий двудольности.** Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нём нет нечётных циклов.

**6.** В каждой вершине связного графа записали число. Затем на каждом ребре записали сумму чисел в его концах, а числа в вершинах стерли. Докажите, что можно однозначно восстановить числа в вершинах тогда и только тогда, когда граф не является двудольным.

**7.** 38 попугаев передрались, измеряя рост удава. Каждый из них сумел выдрать одно перо из чьего-то хвоста, и у каждого попугая было выдрано одно перо. Кроме того, для любых трёх попугаев можно указать четвёртого, выдравшего перо у одного из них. Доказать, что для наведения порядка удав может проглотить не более 6 попугаев, а остальных рассадить поровну в две клетки так, чтобы ни один попугай не попал в одну группу со своим обидчиком.

### *Дополнительные задачи*

**8.** Какое наибольшее количество ребер может быть в двудольном графе, в котором

а)  $2n$  вершин;

б)  $2n + 1$  вершин?

**9.** В стране 20 городов, причем между любыми двумя городами проложена дорога. Министерство путей сообщения может закрыть на ремонт любую дорогу из четырёх, образующих циклический маршрут. Может ли после нескольких таких операций остаться только 19 дорог?

**10.** В ящике лежат игрушечные котики. Голова каждого котика покрашена в один из 2025 цветов. Хвост каждого котика тоже покрашен в один из этих 2025 цветов — возможно, в тот же, что и голова, а возможно, и в другой. Набор из 2025 котиков называется правильным, если все их головы разного цвета и все хвосты тоже разного цвета. Известно, что в ящике можно выбрать правильный набор котиков более чем одним способом. Докажите, что можно оставить в ящике несколько котиков (возможно, всех) так, что из них правильный набор удастся выбрать ровно двумя способами.

## 18. Симметричные игры. 14 июля

1. Имеется две кучки камней. В одной — 25 камней, в другой — 30. За один ход разрешается брать любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот, кто забрал последний камень. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Петя и Вася отрывают лепестки у ромашки. За один ход можно оторвать либо один лепесток, либо два рядом стоящих. Выигрывает тот, кто оторвал последний лепесток. Кто выигрывает при правильной игре, если лепестков

а) 100;

б) 101.

3. У Пети и Васи есть полоска из  $n$  клеток. Они по очереди закрашивают клетки этой полоски. За один ход можно закрасить либо одну клетку, либо две рядом стоящие клетки. Выигрывает тот, кто закрасил последнюю клетку. Кто выигрывает при правильной игре, если лепестков

а) 100;

б) 101.

4. Два игрока по очереди ставят королей на шахматную доску: первый игрок — белых королей, второй игрок — чёрных. Запрещается ставить своего короля под бой короля противника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?



5. Двое по очереди кладут доминошки на клетки доски на рисунке. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кому удастся победить: начинающему или его сопернику?

6. Двое игроков по очереди выставляют на доску  $65 \times 65$  по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Петя и Вася играют на доске  $100 \times 100$ . Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

8. На шахматной доске  $7 \times 8$  в двух противоположных углах стоят ладьи, а в остальных клетках стоят пешки. Двое по очереди двигают ладьи (каждый свою), причем за

каждый ход ладья должна срубить либо пешку, либо ладью соперника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

### *Дополнительные задачи*

**9.** Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычёркивает 9 чисел (по своему выбору) из последовательности  $1, 2, \dots, 100, 101$ . После одиннадцати таких вычёркиваний останутся 2 числа. Первому игроку присуждается столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Доказать, что первый игрок всегда сможет набрать по крайней мере 55 очков, как бы ни играл второй.

**10.** В строку выписаны числа  $1, 2, 3, \dots, 60$  (ровно в таком порядке). Петя и Вася по очереди ставят знаки «+», «-» и « $\times$ » между ними, начинает Петя; за ход каждый ставит один знак. Когда между каждыми двумя соседними числами поставлен знак, вычисляется значение полученного выражения. Если оно делится на 3, то победа присуждается Пете, иначе Васе. Кто из игроков может выиграть независимо от действий соперника?

## **19. Точки и прямые. 14 июля**

### *Упражнения*

**1)** На плоскости отмечены 4 точки. Через каждые две точки провели прямую. Сколько различных прямых могло получиться? Найдите все возможные значения. Тот же вопрос для 5 точек.

**2)** На плоскости проведено 4 прямых так, что любые две из них пересекаются. Сколько всего точек пересечения могло получиться? Найдите все возможные значения. Тот же вопрос для 5 таких прямых.

### *Задачи*

**1.** Постройте замкнутую шестизвенную ломаную, пересекающую каждое своё звено ровно один раз.

**2.** Можно ли нарисовать на плоскости шесть точек и так соединить их непересекающимися отрезками, что каждая точка будет соединена ровно с четырьмя другими?

**3.** Город Треугольный представляет собой правильный треугольник со стороной 2025, разбитый 6075 улицами, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1 (стороны города — тоже улицы). Полицейский, стоящий на улице, обеспечивает порядок на всём её протяжении. Какое наименьшее количество полицейских можно расставить на улицах города для того, чтобы обеспечить порядок на всех улицах?

4. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы от каждой на расстоянии 1 находилось ровно три точки.

5. На плоскости расположено  $N$  точек. Отметим середины всевозможных отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее число отмеченных точек может получиться?

### *Дополнительные задачи*

6. На плоскости дано  $n$  точек, причём из любой четвёрки этих точек можно выбросить одну точку так, что оставшиеся точки будут лежать на одной прямой. Докажите, что из данных точек можно выбросить одну точку так, что все оставшиеся точки будут лежать на одной прямой.

7. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное  $k$ , что при любом изначальном порядке рубашек можно снять  $k$  белых и  $k$  фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

## **20. Жадный алгоритм. 14 июля**

1. Дату записывают 8-ю цифрами, например, сегодня 14.07.2025. Какова наибольшая возможная сумма цифр среди прошедших дат нашей эры?

2. Есть 13 красных, 17 синих, 20 жёлтых и 55 зелёных ягод. Какое наибольшее число разноцветных пар можно из них составить?

3. Дан клетчатый квадрат  $7 \times 7$ . По границам клеток его разрезали на прямоугольники с разным числом клеток. Каково наибольшее возможное количество частей?

4. За какое наименьшее число ходов конь может пройти из левого нижнего угла доски  $25 \times 25$  в правый верхний?

5. В банке работают 200 сотрудников. Все сотрудники пришли на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 крипто-монеты. Какой наибольшей может быть разница двух зарплат сотрудников этого банка, если известно, что все зарплаты сотрудников различны?

## **21. Полуинвариант, дискретная непрерывность. 15 июля**

### *Упражнения*

1) В клетках таблицы  $99 \times 99$  расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время и во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет больше, чем минусов.

2) В ряд выложены 50 чёрных и 50 белых шаров, причём самый левый и самый правый шары чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы белых и чёрных шаров осталось поровну.

### *Задачи*

1. На шахматной доске  $100 \times 100$  королю разрешено ходить вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Какое наибольшее число ходов он может сделать?

2. В клетках таблицы  $99 \times 99$  расставлены целые числа. Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что можно сделать в итоге лишь конечное число таких операций.

3. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырёх идущих подряд чисел  $a, b, c, d$  оказывается, что  $(a - d)(b - c) < 0$ , то числа  $b$  и  $c$  можно поменять местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

4. В клетки прямоугольной таблицы вписаны числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Докажите, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел в любой строке или любом столбце неотрицательны.

5. В парламенте каждый депутат имеет не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого депутата в его палате было не более одного врага.

6. На плоскости дано 100 красных и 100 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с разноцветными концами.

7. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя лежат карты рубашкой вниз (в частности, может вынут просто одну карту рубашкой вниз), переворачивает эту пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что независимо от того, как Петя выбирает пачки, в конце концов все карты лягут рубашкой вверх.

8. Шеренга из 100 новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, а некоторые — направо. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

9. За круглым столом сидит чётное количество гномов. У каждого на колпаке несколько помпонов. Причём у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не более чем на 1. Докажите, что найдётся пара гномов, сидящих

друг напротив друга, количества помпонов на колпаках которых отличаются не больше чем на 1.

## Внутренний матбой М6. 15 июля

1. На полу стоят 4 большие гири. Силач Сидоров долго поднимал эти гири и пришёл к выводу, что, какие три гири ни возьми, какая-то одна гиря будет весить в 2 раза больше, чем две другие, вместе взятые. Может ли так быть? Веса некоторых гирь могут совпадать.

2. Вася заменил в словах МИНОТАВР и ДИНОЗАВР буквы цифрами (разные буквы — разными цифрами, одинаковые — одинаковыми) так, чтобы разность между большим и меньшим из этих чисел имела наибольшую возможную сумму цифр. Чему равна эта сумма?

3. Дано 100-значное число, все цифры которого отличны от 0. Его цифры разбили на пары соседних и в каждой паре цифры поменяли местами. Могло ли число после такой операции увеличиться ровно в 5 раз? Напомним, что число не может начинаться с 0.

4. На конгресс приехало 100 учёных, каждый знает три языка. Оказалось, что любые четверо из них могут общаться на одном языке. Докажите, что и любые пятеро могут общаться на одном языке.

5. В задании на контрольной надо было посчитать сумму

$$1, 11 + 1, 22 + 1, 33 + 1, 44 + 1, 55 + 1, 66 + 1, 77 + 1, 88 + 1, 99.$$

Ваня думал, что в ответе обязательно должно быть целое число, поэтому он, не заметив часть запятых, получил целое число. Какое наименьшее число запятых мог не заметить Ваня?

6. Квадрат разрезали на фигурки вида, показанного на рисунке справа. Каков наименьший возможный размер этого квадрата? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

7. Андре, проживающий в городе А, выехал из него, доехал до города Б, провел там ровно час, после чего выехал обратно в А. Его друг Блез, живущий в городе Б, выехал из города Б в тот же момент, когда и Андре из А, доехал до города А, провел там час и вернулся в Б. Оба путешественника двигались с постоянной скоростью (скорость Андре и Блеза могла быть разной). Их первая встреча произошла в 70 км от города А, а вторая — в 40 км от города Б, причем оба уже возвращались домой. Найдите расстояние между А и Б.

8. При каких натуральных  $n$  число  $n! \cdot (n+1)! \cdot (n+2)!$  является точным кубом?

**Внешний матбой М6 — М7. 15 июля**

1. Даны  $4n$  натуральных чисел ( $n > 10$ ), не превосходящих  $6n$  (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел  $a$  и  $b$  таких, что  $a$  делится на  $b$ , можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

2. В квадрате  $11 \times 11$  отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате  $2 \times 2$  также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

3. У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число  $a < 1$ , а таракан проползает  $a$  см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?

4. Буквы  $A, B, C, D, E, F, G$  это различные цифры. Известно, что

$$A \cdot B \cdot C = C \cdot D \cdot E = E \cdot F \cdot G.$$

Можно ли однозначно определить значение  $D$ ?

5. В торговом центре установили два автомата по продаже шариков с сюрпризом. Первый автомат поочередно выдаёт красные и синие шарики, второй — красные и зелёные. Известно, что девятый и десятый посетитель получили красные шарики, а двадцать четвёртый — синий. Можно ли установить, какого цвета шарик получил двадцать пятый посетитель? Номера посетителей считаются в порядке подхода к автоматам. Каждому достаётся ровно один шарик.

6. Однажды Лидочка вышла из дома и пошла в театр. В 12:00 ей встретился велосипедист Миша, едущий вдвое быстрее, чем Лидочка ходит, и предложил подбросить её до того места, откуда до театра будет такое же расстояние, как сейчас от Лидочки до её дома. Лидочка согласилась, а потому уже через час была у дверей театра. Оказалось, что спектакль отменили, потому Лидочка развернулась и пошла домой. Когда она будет дома?

7. Вокруг толстого дуба стоят 4 мудреца так, что каждый мудрец видит мудрецов, стоящих слева и справа от него, но не видит противоположного. На них надевают шляпы одного из четырёх цветов (цвета не повторяются), после чего каждый мудрец называет цвет, в который, по его мнению, покрашена шляпа на нём (цвета шляп известны мудрецам заранее). Какое наибольшее количество мудрецов могут гарантированно отгадать цвет своей шляпы?

8. Дед Мороз раздаёт детям конфеты. Первому и второму он выдает по одной конфете, третьему и четвёртому по две, следующим двоим по 3 и т.д. Всего таким способом он поздравил  $2n$  детей. При каких  $n$  можно расставить детей в ряд так, чтобы у всех, кроме первого и последнего, количество конфет равнялось или сумме, или разности количеств конфет своих соседей?

## Внешний матч ПРОФИ-6 — ПРОФИ-7. 15 июля

1. Даны  $4n$  натуральных чисел ( $n > 10$ ), не превосходящих  $6n$  (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел  $a$  и  $b$  таких, что  $a$  делится на  $b$ , можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

2. В квадрате  $11 \times 11$  отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате  $2 \times 2$  также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

3. У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число  $a < 1$ , а таракан проползает  $a$  см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?

4. Буквы  $A, B, C, D, E, F, G$  это различные цифры. Известно, что

$$A \cdot B \cdot C = C \cdot D \cdot E = E \cdot F \cdot G.$$

Можно ли однозначно определить значение  $D$ ?

5. Ада и Чарльз играют в следующую игру: в начале на доске написано целое число  $n > 1$ . По очереди Ада и Чарльз стирают с доски число  $k$  и заменяют его либо на положительный делитель  $k$ , отличный от 1 и  $k$  (ход 1), либо на  $k + 1$  (ход 2). В начале у каждого игрока по тысяче очков. Когда игрок выбирает ход 1, он/она получает одно очко; когда игрок выбирает ход 2, он/она теряет одно очко. Игра заканчивается, когда у одного из игроков остаётся ноль очков, и этот игрок проигрывает. Ада ходит первой. При каких значениях  $n$  у Чарльза есть выигрышная стратегия?

6. Докажите, что у клетчатого многоугольника с площадью 300 и периметром 300 есть сторона длиной больше 1. (Многоугольник не содержит дырок, т. е. его граница — замкнутая ломаная без самопересечений.)

7. Вокруг тонкого дуба стоят  $2n$  мудрецов так, что каждый мудрец видит всех мудрецов, кроме противоположного. На них надевают шляпы одного из  $2n$  цветов

(цвета не повторяются), после чего каждый мудрец называет цвет, в который, по его мнению, покрашена шляпа на нём (цвета шляп известны мудрецам заранее). Какое наибольшее количество мудрецов могут гарантированно отгадать цвет своей шляпы?

8. Дед Мороз раздаёт детям конфеты. Первому и второму он выдает по одной конфете, третьему и четвертому по две, следующим двоим по 3 и т.д. Всего таким способом он поздравил  $2n$  детей. При каких  $n$  можно расставить детей в ряд так, чтобы у всех, кроме первого и последнего, количество конфет равнялось или сумме, или разности количеств конфет своих соседей?

## 22. Игры–2. 17 июля

### Упражнения

1) На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник  $5 \times 9$ . В левом нижнем углу стоит фишка. Коля и Серёжа по очереди передвигают ее на любое количество клеток либо вправо, либо вверх. Первым ходит Коля. Выигрывает тот, кто поставит фишку в правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре?

2) Ладья стоит на поле  $a1$  шахматной доски. Разрешается за ход сдвинуть её вправо или вверх. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

3) Та же задача, но тот, кому некуда ходить, выигрывает.

### Задачи

1. На доске написано число 1. Два игрока по очереди прибавляют любое число от 1 до 4 к числу на доске и записывают вместо него сумму. Выигрывает игрок, который первый запишет на доске число 100. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Ферзь стоит на поле  $c1$ . За ход его можно передвинуть на любое число полей вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх». Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле  $h8$ . Кто выигрывает при правильной игре?

3. В коробке лежит 300 спичек. За ход разрешается взять из коробка не более половины имеющихся в нем спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Имеются две кучки конфет: в одной — 20, в другой — 21. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две не обязательно равные кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Есть ряд из 24 луночек. В трёх из них лежит по шарик. Игроки по очереди делают ход: берут один из крайних шариков и перекладывают в свободную луночку

между двумя другими. Тот, кто не может сделать ход, считается проигравшим. Кто — начинающий игру или ходящий вторым — победит при правильной игре?

- а) Шарики лежат в 3, 11, 20;
- б) Шарики лежат в 3, 12, 23.

6. Двое по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом первый игрок выписывает на доску число 1. Затем очередным ходом на доску можно выписать либо число  $2a$ , либо число  $a + 1$ , если на доске уже написано число  $a$ . При этом запрещается выписывать числа, которые уже написаны на доске. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Часовая стрелка установлена на 12 часах. Двое по очереди двигают ее на 2 или 3 часа вперед. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку снова на 12 часов. Через 12 часов можно «перепрыгивать». Для каждого начального положения стрелки (и конечного положения на 12 часах) определите, кто выигрывает при правильной игре.

8. Имеется три кучи камней: 1, 3, 5. За один ход разрешается взять любое (ненулевое) количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто взял последний камень. Кто выигрывает при правильной игре?

9. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или четыре камня, либо увеличить количество камней в куче в пять раз. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 68 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 67$ .

а) Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

б) Найдите все такие значения  $S$ , при которых Петя гарантировано выиграет не позднее своего второго хода.

в) Найдите все такие значения  $S$ , при которых Ваня гарантировано выиграет не позднее своего второго хода.

### *Дополнительные задачи*

10. Есть длинный ряд луночек. В трёх из них лежит по шарик. Игроки по очереди делают ход: берут один из крайних шариков и перекладывают в свободную луночку между двумя другими. Тот, кто не может сделать ход, считается проигравшим. Кто — начинающий игру или ходящий вторым — победит при правильной игре? Между крайними шариками и средним имеется  $N$  и  $K$  пустых луночек.

11. Петя и Вася играют в игру. Изначально на столе лежит кучка из  $N$  конфет. Петя делит ее на три непустые кучки, а Вася две из них съедает. Затем Вася делит остатки на три непустые кучки, а Петя две из них съедает, и так далее. Кто не может сделать ход, проигрывает. При каких  $N$  при правильной игре выигрывает первый игрок, а при каких — второй?

## 23. Зацикливание. 17 июля

### Упражнения

1) На доске написано число 76. Каждую минуту число стирают с доски и на его место записывают произведение его цифр, увеличенное на 12.

а) Что окажется на доске через час?

б) Докажите, что, какое бы число ни было написано на доске первоначально, последовательность зациклится.

2) Леонид Борисович оставил на дверях всех корпусов Вишкиля записки следующего содержания: «Я в корпусе №...» и исчез в неизвестном направлении. (Разные записки могут сообщать разную информацию). Шестиклассник Андрей начал его поиски, руководствуясь этими указаниями.

а) Докажите, что с некоторого момента шестиклассник начнет двигаться по циклу.

б) Можно ли утверждать, что Андрей когда-нибудь вернется в корпус, с которой начал поиски?

в) Можно ли утверждать, что Андрей вернётся в начальный корпус, если все записки сообщают разную информацию?

**Утверждение.** Если система может находиться в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по предыдущему, то система с некоторого момента зациклится. Если вдобавок по текущему состоянию можно определить предыдущее, то система зацикливается без предпериода.

### Задачи

1. Петя написал на доске двузначное число. После этого он умножил его сумму цифр на 23 и написал последние две цифры результата. Потом он снова умножил сумму цифр получившегося числа на 23 и написал 2 последние цифры, и т.д.

а) Докажите, что не позже, чем через 100 ходов на доске появится число, которое там уже было, и с этого момента последовательность выписываемых чисел зациклится.

б) Верно ли, что начальное число обязательно появится на доске?

2. В последовательности цифр  $1, 1, 4, 6, 1, 1, 8, 0, 9, \dots$  каждая цифра, начиная с четвёртой, равна последней цифре суммы трёх предыдущих.

а) Докажите, что какая-нибудь комбинация из трёх цифр в этой последовательности встретится бесконечное число раз.

б) Докажите, что можно найти повторяющуюся комбинацию среди первых 1003 цифр этой последовательности.

в) Встретятся ли в этой последовательности ещё раз цифры 1, 1, 4, идущие подряд?

г) Встретятся ли цифры 1, 8, 2, идущие подряд?

д) Встретятся ли цифры 2, 7, 4, идущие подряд?

**3.** По кругу стоит несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т.д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

**4.** В стране Топляндии дорог много, а тупиков и вовсе нет. По этой стране едет рыцарь. Докажите, что когда-нибудь он вернется в начало пути, если на развилках он поворачивает

а) на самую левую дорогу;

б) то на самую левую, то на самую правую дорогу.

**5.** В алфавите людоедского племени 10 букв: А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я. Людоедские шпионы обмениваются зашифрованными сообщениями. Алгоритм шифрования заменяет каждую из 10 людоедских букв на какую-то другую букву, причём разные заменяются на разные.

а) Докажите, что после нескольких применений этого алгоритма мы вернёмся к исходному тексту.

б) Мы не знаем правило замены, но у нас есть зашифрованный текст и программа, реализующая алгоритм шифрования. Программу можно запускать любое число раз. Какое наименьшее число раз нужно запустить эту программу, чтобы наверняка прочитать расшифрованное сообщение?

в) Слово АИУЭО после однократного применения алгоритма шифрования превратилось в ЁЭИОЯ. Может ли оно после ещё нескольких применений этого же алгоритма превратиться в слово АУЮИЭ? Если может, то через сколько (укажите все варианты)?

**6.** В зоопарке имеется десять лестниц, на нижней ступеньке каждой из которых сидит по обезьяне, а на верхней — лежит по одному банану. От некоторых ступенек лестниц отходят веревки к ступенькам других лестниц (от каждой ступеньки — не более одной веревки, к самым верхним и самым нижним ступенькам лестниц верёвки не привязаны). Обезьяны лезут по лестницам вверх; каждый раз, когда обезьяна попадает на ступеньку

с веревкой, она перелезает по веревке на другую лестницу и продолжает лезть вверх. Докажите, что все бананы будут съедены.

### *Дополнительные задачи*

7. Дана бесконечная последовательность цифр. Известно, что количество различных подпоследовательностей из 15 цифр равно количеству различных подпоследовательностей из 16 цифр. Докажите, что эта последовательность цифр периодична.

8. К некоторому натуральному числу справа приписывают тройки. Докажите, что в некоторый момент получится составное число.

## 24. Клетчатые многоугольники. 18 июля

**Определение.** Расстоянием между клетками  $A$  и  $B$  называется длина кратчайшего пути хромой ладьи из  $A$  в  $B$ .

**Упражнение.** Докажите, что у клетчатого многоугольника с площадью 300 и периметром 300 есть сторона длиной больше 1.

### *Задачи*

1. Докажите, что из клетчатого многоугольника всегда можно удалить одну клетку так, что останется клетчатый многоугольник.

2. Докажите, что клетчатый многоугольник из  $n$  клеток содержит внутри себя не менее  $n - 1$  единичных отрезков сетки.

3. Докажите, что периметр клетчатого многоугольника из  $n$  клеток не превосходит  $2n + 2$ .

4. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали клетчатый многоугольник. Докажите, что можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий её прямоугольник того же либо меньшего периметра.

5. **Изопериметрическое неравенство.** Для клетчатого многоугольника площади  $S$  и периметра  $P$  выполняется неравенство  $P^2 \geq 16S$ .

6. Докажите, что у клетчатого многоугольника углов, равных  $90^\circ$ , на 4 больше чем углов, равных  $270^\circ$ .

7. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером  $102 \times 102$  клеток и клетчатый многоугольник площади 101. Докажите, что из квадрата можно вырезать по крайней мере 4 таких многоугольника.

*Дополнительные задачи*

8. Квадрат со стороной 100 разрезан по линиям сетки на 100 прямоугольников одинакового периметра  $P$ . Найдите максимальное возможное значение  $P$ .

9. Докажите, что клетчатый многоугольник площади 202 можно разделить на 101 прямоугольник.

10. Докажите, что площадь  $S$  клетчатого многоугольника можно вычислить по формуле:  $S = N + \frac{P}{2} - 1$ , где  $N$  — количество узлов сетки, находящихся внутри этого многоугольника, а  $P$  — количество узлов, находящихся на его границе (т.е. его периметр).

**25. Взвешивания. 18 июля**

**Упражнение.** Дано а) 27; б) 28 монет, из которых одна фальшивая, причём фальшивая монета легче настоящей. За какое наименьшее число взвешиваний можно определить фальшивую монету?

*Задачи*

1. Среди восьми монет, возможно, есть одна легкая фальшивая монета. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти фальшивую монету или доказать, что такой нет?

2. В ряд лежат 100 внешне одинаковых монет. Среди них ровно 26 фальшивых, причём они лежат подряд. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — не обязательно одинаково, но они легче настоящих. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету?

3. Среди пяти внешне одинаковых монет 3 настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?

4. Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может это всем доказать (то есть обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов. Докажите, что для этой цели ему

а) достаточно четырёх взвешиваний;

б) недостаточно трёх взвешиваний.

5. В клетчатом квадрате  $8 \times 8$  закрашено 25 клеток, образующих квадрат  $5 \times 5$ . Разрешается выбрать любую клетку квадрата  $8 \times 8$  и спросить, закрашена ли она. За

какое наименьшее число таких вопросов можно наверняка определить, какие клетки закрашены?

6. Есть четыре гири — 1, 2, 3 и 4 грамма. Одна из них — дефектная (легче или тяжелее того веса, который на ней написан). Можно ли найти эту гирю за 2 взвешивания, и определить, легче она или тяжелее?

7. У математика есть 19 различных гирь, массы которых в килограммах равны 2, 3, 4, ..., 20, и волшебные двухчашечные весы, которые не суммируют веса гирь на одной чаше, а перемножают. Он положил несколько гирь на весы так, что установилось равновесие. Какое наибольшее число гирь могло оказаться на весах?

8. Есть семь пронумерованных монет, причем одна из них — фальшивая. Известно, что 1 и 2 — не тяжелее настоящей, а 5, 6 и 7 — не легче. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее?

9. На витрине ювелирного магазина лежат 15 бриллиантов. Рядом с ними стоят таблички с указанием масс, на которых написано 1, 2, ..., 15 карат. У продавца есть чашечные весы и четыре гирьки массами 1, 2, 4 и 8 карат. Покупателю разрешается только один тип взвешиваний: положить один из бриллиантов на одну чашу весов, а гирьки — на другую и убедиться, что масса на соответствующей табличке указана верно. Однако за каждую взятую гирьку нужно заплатить продавцу 100 монет. Если гирька снимается с весов и в следующем взвешивании не участвует, продавец забирает её. Какую наименьшую сумму придётся заплатить, чтобы проверить массы всех бриллиантов?

## 26. Алгоритмы вслепую. 19 июля

1. Семья (папа, мама, сын и бабушка) ночью подошла к мосту, способному выдержать только двух человек одновременно. По мосту можно двигаться только с фонариком. Известно, что папа может перейти мост в одну сторону за минуту, мама — за две, сын — за пять и бабушка — за десять минут. Если по мосту движутся двое, время перехода определяется более медленным из двоих. Как семье переправиться менее чем за 18 минут? (Фонарик у них один, кидать его нельзя, светить издали тоже нельзя.)

2. Три вора Камнев, Ножницын и Бумагин, каждый с двумя баулами, хотят переправиться через реку. Известно, что Камнев обворует любой баул Ножницына, если баул останется без присмотра кого-нибудь из остальных. Так же Ножницын обворует оставшийся без присмотра баул Бумагина, а Бумагин — баул Камнева. Есть трехместная лодка, место занимает человек или баул. Грести может только Камнев. Как им всем переправиться и перевезти баулы, чтобы никто никого не обворовал?

3. Несколько вагонов без окон сцеплены по кругу. Вы находитесь внутри одного из них. Ваша задача — определить, сколько всего вагонов. В каждом вагоне есть лампочка, вы можете включать и выключать свет в том вагоне, в котором находитесь, а также переходить в один из соседних вагонов. Как вы будете действовать?

4. Мишень «бегущий кабанчик Денис» (ну или брат его Борис) находится в одном из 100 окошек, расположенных в ряд. Окошки закрыты, поэтому для стрелка мишень всё время остаётся невидимой. Чтобы поразить мишень, достаточно выстрелить в окошко, в котором она в момент выстрела находится. Если мишень находится не в самом правом окошке, то сразу после выстрела она перемещается на одно окошко вправо, иначе она остаётся на месте. Как за 51 выстрел поразить мишень?

5. Аня и Лёня играют в игру. Лёня загадывает натуральное число от 1 до а) 4; б) 1000. Своим ходом Аня называет любое число. Если оно совпадает с числом Лёни, то Аня победила. Если же нет, то Лёня прибавляет к своему числу 2 и возводит в квадрат. Как Аня может победить?

6. На бесконечной в обе стороны дороге находится кот Серёжа, бегающий со скоростью 10 км/ч, и злой Леонид Борисович, бегающий со скоростью 12 км/ч. Леонид Борисович не знает, где находится Серёжа, и увидит его, только если окажется с Серёжей в одной точке. Как Леониду Борисовичу действовать, чтобы гарантированно потаскать кота за хвост?

7. В тёмной комнате  $10\text{ м} \times 10\text{ м}$  бегают таракан со скоростью  $0.1\text{ м/с}$ , а за ним гоняется близорукий кот со скоростью  $1\text{ м/с}$ . Кот увидит таракана, если окажется в метре от него. Сможет ли кот поймать таракана?

8. Назовём лабиринтом шахматную доску  $8 \times 8$ , на которой между некоторыми полями поставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа находится край доски или перегородка, остаётся на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Программист пишет программу — конечную последовательность указанных команд, и даёт её пользователю, после чего пользователь выбирает лабиринт и помещает в него ладью на любое поле. Верно ли, что программист может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе пользователя?

## 27. Текстовые задачи. 19 июля

### Упражнения

1) Колонна солдат длины 10 км движется с постоянной скоростью 5 км/ч. Всадник поехал с пакетом из конца в начало колонны со скоростью 15 км/ч, передал пакет и

поехал обратно в конец колонны. Сколько времени провёл всадник в пути и какой путь он прошёл?

2) Два города, А и В, находятся на расстоянии 100 км друг от друга. Из этих городов одновременно выезжают навстречу два велосипедиста, из А со скоростью 15 км/ч, из В — 25 км/ч. Одновременно с ними из города А в город В вылетает муха, пролетающая в час 30 км. Встретив велосипедиста В, она сразу поворачивает назад к велосипедисту А. Повстречав его, опять летит обратно навстречу велосипедисту В. И так продолжала она свои полеты вперед и назад до тех пор, пока велосипедисты не съехались. Сколько километров пролетела муха?

### *Задачи*

1. Первую половину пути автомобиль ехал со скоростью 40 км/ч, а вторую половину пути со скоростью 60 км/ч. Чему равна средняя скорость автомобиля?

2. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 16 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого?

3. Два друга плавали на плоту по реке. В какой-то момент они одновременно прыгнули с плота и поплыли в разные стороны: один — по течению, второй — против течения реки. Через 30 минут они одновременно повернули и поплыли обратно. Какой из них доплывёт до плота быстрее? (Их скорости не обязательно равны, но больше скорости течения реки).

4. Инженер ежедневно приезжает поездом на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 часов утра и пошёл навстречу машине. Встретив машину, он сел в неё и приехал на завод на 20 минут раньше, чем обычно. Во сколько инженер встретил машину? Скорости автомобиля и инженера постоянны.

5. Третью всего времени автомобиль ехал со скоростью  $v_1 = 40$  м/с, затем половину оставшегося пути он ехал со скоростью  $v_2 = 10$  м/с, а на оставшемся участке его скорость была  $v_3 = 40$  м/с. Найдите среднюю скорость автомобиля.

6. Антон сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он решил пробежать вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал, спускаясь вместе с милиционером по неподвижному эскалатору?

### *Дополнительные задачи*

7. Пончик закусывал в придорожном кафе, когда мимо него проехал автобус. Через три плюшки после автобуса мимо Пончика проехал мотоцикл, а ещё через три

плюшки — автомобиль. Мимо Сиропчика, который закусывал в другом кафе у той же дороги, они проехали в другом порядке: сначала — автобус, через три плюшки — автомобиль, а ещё через три плюшки — мотоцикл. Известно, что Пончик и Сиропчик всегда едят плюшки с одной и той же постоянной скоростью. Найдите скорость автобуса, если скорость автомобиля — 60 км/ч, а скорость мотоцикла — 30 км/ч.

8. От станции Простоквашино до дома, в котором живёт кот Матроскин, расстояние  $s = 1,2$  км. Дядя Фёдор с Шариком приехал на станцию Простоквашино и пошёл домой вниз по склону со скоростью 4 км/ч, а Шарик побежал со скоростью 12 км/ч. Добежав до дома, Шарик повернул обратно и побежал вверх по склону навстречу дяде Фёдору со скоростью 8 км/ч. Так пёс бегал вперед и назад между дядей Фёдором и домом вплоть до момента прибытия мальчика домой. Какой путь больше: суммарный путь  $S_1$ , который Шарик пробежал, перемещаясь в сторону дома, или  $S_2$ , который он пробежал, перемещаясь в обратном направлении? На сколько один путь длиннее другого? Определите  $S_1$  и  $S_2$ .

## 28. Числа по кругу. 20 июля

**Упражнение.** За круглым столом сидят мальчики и девочки. Тогда пар рядом сидящих детей разного пола — чётное количество. А если мальчиков и девочек не поровну, то найдётся пара рядом сидящих детей одного пола.

### Задачи

1. По кругу стоят мальчики и девочки, всего 33 человека. Докажите, что найдутся дети одного пола, между которыми

- а) ровно один;
- б) ровно два человека.

2. По кругу написаны все целые числа от 1 по 200 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочерёдно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, чётна.

3. Каждое число по кругу есть сумма двух следующих за ним по часовой стрелке (всего не менее трёх чисел по кругу).

- а) Докажите, что сумма всех чисел равна 0.
- б) Докажите, что все числа равны 0.

4. По кругу записаны несколько чисел (не обязательно целые), не все из них одинаковы. Сумма любых пяти подряд равна 73. Докажите, что количество чисел кратно 5.

5. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 записали по кругу в некотором порядке. Назовём записанное число *хорошим*, если оно равно сумме двух чисел, записанных рядом с ним. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел среди записанных?

6. По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырёх стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел?

7. По окружности записали красным пять несократимых дробей с нечётными знаменателями, большими 1010. Между каждыми двумя соседними красными дробями вписали синим несократимую запись их суммы. Могло ли случиться, что у синих дробей все знаменатели меньше 100?

## 29. Посредник в неравенствах. 20 июля

### Упражнения

1) Докажите, что  $101^3 > 999^2$ .

2) Какая из дробей больше:  $\frac{33}{64}$  или  $\frac{19}{39}$ ?

### Задачи

1. Сравните  $127^{23}$  и  $513^{18}$ .

2. Есть 100 пар дедов Морозов со Снегурочками, каждый выше своей Снегурочки. Докажите, что если распределить Снегурочек по росту (самому высокому — самую высокую, и т.д.), то все равно каждый дед Мороз окажется выше доставшейся ему Снегурочки.

3. Докажите, что любое многозначное число больше произведения своих цифр.

4. В клетках таблицы  $10 \times 10$  стоят 100 различных чисел. Аня выбрала в каждой строке максимальное число, и из этих 10 чисел выбрала наименьшее. Ваня выбрал в каждом столбце наименьшее число, и из этих 10 чисел выбрал наибольшее. У кого из них число больше?

5. Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же клетчатой таблицы  $5 \times 5$ , заполненной 25 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел и вычёркивает строку и столбец, содержащие это число, и т.д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Может ли случиться, что сумма чисел, выбранных Яшей больше суммы чисел, выбранных Юрой?

6. На доске было написано равенство. Дежурный по классу успел стереть некоторые цифры (сколько цифр он стёр в каждом из чисел, неизвестно). На доске осталось:  $11 \dots 73 \times 12 \dots 65 = 123 \dots 45$ . Могло ли исходное равенство быть верным?

## Заключительная олимпиада. 22 июля

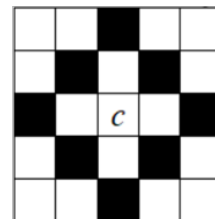
### Довывод

1. Вася написал на доске трёхзначное число. Петя заметил, что у этого числа одинаковые остатки от деления на 8 и 15. А Маша заметила, что его последняя цифра равна сумме первых двух. Какое число мог написать Вася? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

2. В коробке лежит несколько книг общей стоимостью 1000 рублей. Известно, что их можно разделить на 5, а можно и на 8 равных по стоимости пачек. Какую наибольшую стоимость может иметь самая дешёвая книга?

3. На доске записано число  $2023^{2025}$ . Каждую минуту последняя цифра числа запоминается, затем стирается и умноженная на 5 прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Докажите, что с некоторого шага будет получаться одно и то же число и найдите это число.

4. Артём придумал новую шахматную фигуру «сигма-король», который по горизонтали и вертикали бьёт вторую, а не первую по счёту клетку. Какое наибольшее количество попарно не бьющих друг друга сигма-королей можно разместить на шахматной доске  $8 \times 8$ ?



5. Империя Горных гномов состоит из семи королевств, в каждом из королевств гномы добывают золото и алмазы. Верно ли, что всегда можно выбрать такие четыре королевства, которые производят не менее 50% золота и не менее 50% алмазов (от общего производства в империи)?

### Вывод

6. Назовём *словом* любую последовательность букв. Со словами разрешается проделывать следующие операции:

- 1) удалить первую букву слова;
- 2) удалить последнюю букву слова;
- 3) добавить копию слова после него.

Например, если исходное слово —  $ABC$ , применение операций даст  $BC$ ,  $AB$  и  $ABCABC$  соответственно. Верно ли, что с помощью таких операций можно в любом слове переставить буквы в любом порядке?

7. Верно ли, что в любой компании из  $2n$  человек всегда найдутся двое с чётным числом общих знакомых? Любые двое или знакомы или не знакомы.

8. Может ли куб натурального числа в конце своей десятичной записи иметь 2025 единиц?

# Оглавление

Вступительная олимпиада. 2 июля . . . . .	2
1. Разумный перебор. 3 июля . . . . .	2
2. Делимость–1. 3 июля . . . . .	4
3. Последовательное конструирование. 4 июля . . . . .	5
4. Делимость–2. 4 июля . . . . .	6
5. Две модели. 5 июля . . . . .	7
6. Графы. 5 июля . . . . .	8
Групповое занятие 1. Шляпы. 5 июля . . . . .	9
7. Двумя способами. 7 июля . . . . .	10
8. Делимость–3. 7 июля . . . . .	11
9. Инвариант. 8 июля . . . . .	14
10. Комбинаторика–1. 8 июля . . . . .	15
11. От противного. 9 июля . . . . .	16
12. Комбинаторика–2. 9 июля . . . . .	18
13. Целочисленные неравенства. 9 июля . . . . .	20
14. Деревья. 10 июля . . . . .	20
Внутренний матбой М6 (группа 1). 10 июля . . . . .	22
Внутренний матбой М6 (группа 2). 10 июля . . . . .	23
15. Раскраски. 12 июля . . . . .	24
16. Делимость–4. 12 июля . . . . .	25
Групповое занятие 2. Изоморфизм задач. 13 июля . . . . .	27
17. Двудольные графы. 13 июля . . . . .	29
18. Симметричные игры. 14 июля . . . . .	31
19. Точки и прямые. 14 июля . . . . .	32
20. Жадный алгоритм. 14 июля . . . . .	33
21. Полуинвариант, дискретная непрерывность. 15 июля . . . . .	33
Внутренний матбой М6. 15 июля . . . . .	35
Внешний матбой М6 — М7. 15 июля . . . . .	36
Внешний матбой ПРОФИ-6 — ПРОФИ-7. 15 июля . . . . .	37
22. Игры–2. 17 июля . . . . .	38
23. Зацикливание. 17 июля . . . . .	40
24. Клетчатые многоугольники. 18 июля . . . . .	42
25. Взвешивания. 18 июля . . . . .	43
26. Алгоритмы вслепую. 19 июля . . . . .	44
27. Текстовые задачи. 19 июля . . . . .	45
28. Числа по кругу. 20 июля . . . . .	47
29. Посредник в неравенствах. 20 июля . . . . .	48
Заключительная олимпиада. 22 июля . . . . .	49

